ÁLGEBRA COMPUTACIONAL

ALGEBRA CONMUTATIVA Y GEOMETRÍA ALGEBRAICA AFÍN DESDE EL PUNTO DE VISTA ALGORÍTMICO

El objetivo del curso es introducir temas básicos del álgebra conmutativa y de la geometría algebraica, a través de la perspectiva del álgebra computacional.

En los años 60, Buchberger desarrolló algoritmos para la manipulación de ecuaciones polinomiales en varias variables. Desde la óptica del álgebra conmutative (o de la geometría algebraica afín), su trabajo peude resumirse diciendo que Buchberger creó un algoritmo que permite, dado un ideal I del álgebra de polinomios $\Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$, encontrar un conjunto finito de generadores de I, con buenas propiedades — las por él llamadas *base de Gröbner*.

En este curso estudiaremos, junto con el algoritmo mencionado, las propiedades básicas de las bases de Gröbner, así como las primeras aplicaciones de estas técnicas: resolución de sistemas polinomiales, parametrización de variedades afines, el problema de la implicitación. Aprovecharemos para dar los primerísimos pasos en el estudio de la geometría algebraica afín.

Estudiaremos algunas implementaciones de los algoritmos presentados en el curso en clases de discusión práctica (usando SAGE).

CARGA HORARIA: Se darán dos clases teóricas y una clase práctica (de discusión de ejercicios e implementación de los algoritmos).

PRERREQUISITOS: Un curso de que cubra las nociones básicas de la teoría de anillos conmutativos.

Date: October 14, 2019.

Programa

1. Repaso de anillos de polinomios. Topología de Zariski, subvariedades de k^n (variedades algebraicas afines). Parametrizaciones de variedades afines. Anillos, ideales, definiciones básicas, ideales primos y maximales. Polinomios en una variable. (*4 clases*)
2. Bases de Gröbner. Presentación de los problemas que motivan la construcción. Anillos graduados. Órdenes en los monomios de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Algoritmo de división en $k[x_1, \ldots, x_n]$. Ideales monomiales, lema de Dickson. (*4 clases*)
3. Teorema de la base de Hilbert. Bases de Gröbner y generación finita de ideales. Bases de Gröbner; propiedades. El algoritmo de Buchberger. Bases de Gröbner minimales y reducidas. (*4 clases*)
4. Primeras aplicaciones de bases de Gröbner. Pertenencia a ideales. Resolución de ecuaciones polinomiales. Descripción del ideal asociado a una subvariedad de k^n descrita paramétricamente. (*3 clases*)
5. Mejoras al algoritmo de Buchberger. (*1 clase*)
6. Conceptos básicos de la geometría algebraica afín. Nullstellensatz débil. Anillos noëtherianos, anillos artinianos. Suma, intersección y producto de ideales, su interpretación geométrica. Ideales radicales, radical de Jacobson. Ideales primarios, Nullstellenstaz fuerte. La correspondencia ideales–variedades. (*4 clases*)
7. Descomposici'on primaria. Descomposici'on de variedades en componentes irreducibles. Producto tensorial. Producto de variedades afines. Morfismos entre variedades afines. (*3 clases*)
8. Teoría de la eliminación. Teoremas de eliminación y extensión. Geometría de la eliminación. Implicitación. Puntos singulares. Factorización única y resultantes. resultantes yel teorema de extensión. (*4 clases*)

Bibliografía comentada

- Cox Little y O'Shea *Ideals, Varieties and Algoritms.* (13Pxx COXi) Es la base del curso se tratarán los capítulos 4, 1 y 2 más o menos en ese orden. Usaremos la última edición, accesible a través del portal Timbó.
- Cox Little y O'Shea *Using Algebraic Geometry.* (14-01 COXu) Sólo lo puse como referencia, es en algún sentido la continuación del libro anterior.
- Einsenbud, D *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Contiene casi todos los temas del curso, pero asume conocimientos de álgebra conmutativa, y no hace énfasis en los aspectos algorítmicos.